DOI:10.13537/j.issn.1004-3918.2012.01.031

第30卷 第1期 2012年1月
河 南 科 学
HENAN SCIENCE
Vol.30 No.1 Jan. 2012

文章编号:1004-3918(2012)01-0015-03

关于 F. Smarandache LCM 函数与素因数和函数的一个混合均值

赵 琴, 高 丽

(延安大学 数学与计算机学院,陕西 延安 716000)

摘 要:对任意的非负整数 n,著名的 F. Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 定义为最小正整数 k,使得 $n\mid[1,2,\cdots,k]$,其中 $[1,2,\cdots,k]$ 表示 $1,2,\cdots,k$ 的最小公倍数. 利用初等及解析的方法研究函数 $SL(n)$ 与素因数和函数 $\bar{\omega}(n)$ 的加权均值分布,并给出一个有趣的加权均值分布的渐近公式.

关键词:F. Smarandache LCM 函数;混合均值;渐近公式

中图分类号:O 156.4　　**文献标识码**:A

On the Hybrid Mean Value of the F. Smarandache LCM Function and the Prime Factor Sum Function

Zhao Qin, Gao Li

(College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000, Shaanxi China)

Abstract: For any positive integer n, the famous F. Smarandache LCM function $SL(n)$ is defined as the smallest positive integer k such that $n\mid[1,2,\cdots,k]$, where $[1,2,\cdots,k]$ denote the least common multiples of $1,2,\cdots,k$. The main purpose of this paper is using the elementary and analytic methods to study the hybrid mean value problem involving the F. Smarandache LCM function and the prime factor sum function, and give a sharper asymptotic formula for it.

Key words: F. Smarandache LCM function; hybrid mean value; asymptotic formula

1 引言及结论

对任意的正整数 n,著名的 F. Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 定义为最小正整数 k,使得 $n\mid[1,2,\cdots,k]$,其中 $[1,2,\cdots,k]$ 表示 $1,2,\cdots,k$ 的最小公倍数. 对于任意正整数 $n>1$,如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 是 n 的标准分解式,由 $SL(n)$ 的定义很容易就推出

$$SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_s^{\alpha_s}\}. \tag{1}$$

关于 $SL(n)$ 的初等性质,许多学者进行了研究,获得了一系列有趣的结果[2]. 例如文献[2]证明了,如果 n 是一个素数,那么 $SL(n)=S(n)$,这里 $S(n)$ 是 F. Smarandache 函数,即 $S(n)=\min\{m:n\mid m!,m\in \mathbb{N}\}$. 此外,文献[3]研究了 $SL(n)$ 的均值问题,证明了对任意给定的正整数 k 及任意实数 $x>2$ 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}SL(n)=\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right).$$

对任意的正整数 n,如果它的标准分解式是 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$,令 $\bar{\omega}(n)=p_1+p_2+\cdots+p_s$,则称 $\bar{\omega}(n)$ 为 n 的素因

收稿日期:2011-10-24

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10271093);陕西省教育厅专项科研计划项目(07JK430);延安大学自然科学专项科研基金项目(YDZD2011-04)

作者简介:赵 琴(1985-),女,陕西米脂人,硕士研究生,主要从事数论方面的研究

通信作者:高 丽(1966-),女,陕西绥德人,教授,硕士,主要从事数论、代数方面的研究.

数和函数．例如$\overline{\omega}(1)=1$，$\overline{\omega}(2)=2$，$\overline{\omega}(3)=3$，$\overline{\omega}(4)=2$，$\overline{\omega}(5)=5$，$\overline{\omega}(6)=5$，$\overline{\omega}(7)=7$，$\overline{\omega}(8)=2$，$\overline{\omega}(9)=3$，$\overline{\omega}(10)=7$，$\cdots$．显然，这个函数与n的不同的素因子个数$\omega(n)$（$\omega(n)=s$）密切相关，也是可加函数，即对任意的正整数m，n有

$$\overline{\omega}(m\cdot n)=\overline{\omega}(m)+\overline{\omega}(n). \tag{2}$$

文献[4]对$\overline{\omega}(n)$进行了研究，得到了它的均值公式

$$\sum_{n\leqslant x}\overline{\omega}(n)=\frac{\pi^2}{12}\cdot x^2+x^2\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right). \tag{3}$$

本文研究了 F. Smarandache LCM 函数$SL(n)$与素因数和函数$\overline{\omega}(n)$的加权均值分布，并给出一个有趣的加权均值分布的渐近公式，具体也就是证明下面的定理．

定理　对任意实数$x\geqslant 2$，有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}SL(n)\overline{\omega}(n)=D\frac{x^3}{\ln x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^2 x}\right),$$

其中$D=\frac{1}{3}\sum\limits_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{n^3}$为可计算的常数．

2 定理的证明

在这一部分，用初等及解析方法给出定理的证明．事实上在和式

$$\sum_{n\leqslant x}SL(n)\cdot\overline{\omega}(n) \tag{4}$$

中，将区间$[1,x]$中的正整数n分成两个集合A和B，其中集合A包含所有那些满足存在素数p，使得$p|n$且$p>\sqrt{n}$的正整数，而集合B包含所有那些在区间$[1,x]$中不属于集合A的正整数．

注意到素因数和函数$\overline{\omega}(n)$是可加函数，结合(1)、(2)式及集合A的定义有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}SL(n)\overline{\omega}(n)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p|n,p>\sqrt{n}}}SL(n)\overline{\omega}(n)=\sum_{\substack{np\leqslant x\\ p>n}}SL(np)\overline{\omega}(np)=\sum_{\substack{np\leqslant x\\ p>n}}p\left(p+\overline{\omega}(n)\right)=$$

$$\sum_{\substack{np\leqslant x\\ p>n}}\left(p^2+p\overline{\omega}(n)\right)=\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n<p\leqslant\frac{x}{n}}p^2+\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n<p\leqslant\frac{x}{n}}p\overline{\omega}(n).$$

设$\pi(x)=\sum\limits_{p\leqslant x}1$，于是利用 Abel 求和式及素数定理$\pi(x)=\sum\limits_{p\leqslant x}1=\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)$，有

$$\sum_{n<p\leqslant\frac{x}{n}}p^2=\pi\left(\frac{x}{n}\right)\left(\frac{x}{n}\right)^2-\pi(n)\cdot n^2-\int_n^{\frac{x}{n}}2t\pi(t)\,\mathrm{d}t=$$

$$\frac{x^3}{n^3\ln\frac{x}{n}}+O\left(\frac{x^3}{n^3\ln^2\frac{x}{n}}\right)-n^2\pi(n)-2\int_n^{\frac{x}{n}}\left(\frac{t^2}{\ln t}+O\left(\frac{t^2}{\ln^2 t}\right)\right)\mathrm{d}t=$$

$$\frac{x^3}{n^3\ln\frac{x}{n}}+O\left(\frac{x^3}{n^3\ln^2\frac{x}{n}}\right)-n^2\pi(n)-\left(\frac{2}{3}\frac{x^3}{n^3\ln\frac{x}{n}}+O\left(\frac{x^3}{n^3\ln^2\frac{x}{n}}\right)\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{n^3\ln\frac{x}{n}}+O\left(\frac{x^3}{n^3\ln^2\frac{x}{n}}\right).$$

因此

$$\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n<p\leqslant\frac{x}{n}}p^2=\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{n^3\ln\frac{x}{n}}+O\left(\frac{x^3}{n^3\ln^2\frac{x}{n}}\right)\right)=$$

$$\frac{1}{3}\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\left(\frac{x^3}{n^3}\cdot\frac{1}{\ln x-\ln n}\right)+O\left(x^3\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\left(\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{(\ln x-\ln n)^2}\right)\right)=$$

$$\frac{x^3}{3\ln x}\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\left(\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{1-\frac{\ln n}{\ln x}}\right)+O\left(\frac{x^3}{\ln^2 x}\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\left(\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{\ln n}{\ln x}\right)^2}\right)\right)=$$

$$\frac{x^3}{3\ln x}\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{n^3}\left(1+\frac{\ln n}{\ln x}+\frac{\ln^2 n}{\ln^2 x}+\cdots+\frac{\ln^m n}{\ln^m x}+\cdots\right)+$$

$$O\left(\frac{x^3}{\ln^2 x}\cdot\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{n^3}\cdot\left(1+2\frac{\ln n}{\ln x}+\cdots+m\frac{\ln^{m-1} n}{\ln^{m-1} x}+\cdots\right)\right)=D\frac{x^3}{\ln x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^2 x}\right). \tag{5}$$

其中$D=\frac{1}{3}\sum\limits_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{n^3}$为可计算的常数.

由于$\pi(x)=\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)$，结合(3)式就有

$$\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n<p\leqslant\frac{x}{n}}p\bar{\omega}(n)\leqslant\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sqrt{x}\cdot\pi\left(\frac{x}{n}\right)\bar{\omega}(n)\leqslant\sqrt{x}\cdot\frac{x}{\ln x}\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\left(\frac{\bar{\omega}(n)}{n}\right)<<x^{\frac{5}{2}}\ln x. \tag{6}$$

结合(5)、(6)式有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}SL(n)\bar{\omega}(n)=D\frac{x^3}{\ln x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^2 x}\right). \tag{7}$$

其中$D=\frac{1}{3}\sum\limits_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{n^3}$为可计算的常数.

现在讨论集合B中的情况. 由(1)式及集合B的定义知，对任意的正整数$n\in B$，当n的标准分解式是$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$时，有两种情况：$SL(n)=p_s\leqslant\sqrt{n}$，或者$SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_s^{\alpha_s}\}=p_i^{\alpha_i}$，$\alpha_i\geqslant 2$. 由此分析得

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}SL(n)\bar{\omega}(n)\leqslant\sum_{\substack{n\leqslant x,p|n\\ p\leqslant\sqrt{n}}}SL(n)\bar{\omega}(n)+\sum_{\substack{n\leqslant x,p^\alpha|n\\ p\leqslant\sqrt{n},\alpha\geqslant 2}}SL(n)\bar{\omega}(n)\leqslant\sum_{np\leqslant x}\sqrt{np}\cdot\bar{\omega}(n)+\sum_{\substack{np^\alpha\leqslant x\\ \alpha\geqslant 2}}(\alpha+1)SL(p^\alpha)\bar{\omega}(n)\leqslant$$

$$\sqrt{x}\sum_{np\leqslant x}\bar{\omega}(n)+\sum_{\substack{np^\alpha\leqslant x\\ \alpha\geqslant 2}}(\alpha+1)\cdot SL(p^\alpha)\bar{\omega}(n)\leqslant\sum_{np\leqslant x}\sqrt{n}\cdot\ln(n)\bar{\omega}(n)<<x^{\frac{5}{2}}\ln^2 x, \tag{8}$$

其中用到(3)式.

由集合A、B的定义，并结合(7)、(8)式有

$$\sum_{n\leqslant x}SL(n)\bar{\omega}(n)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}SL(n)\bar{\omega}(n)+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}SL(n)\bar{\omega}(n)=D\frac{x^3}{\ln x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^2 x}\right).$$

其中$D=\frac{1}{3}\sum\limits_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{n^3}$为可计算的常数. 这就完成了定理的证明.

参考文献：

[1] F. Smarandache. Only problems, not solutions [M]. Chicago: Xiquan Publ House, 1993.
[2] Murthy A. Some notions on least common multiples [J]. Smarandache Notions Journal, 2001 (12): 307-309.
[3] LV Zhongtian. On the F. Smarandache LCM function and its mean value [J]. Scientia Magna, 2007, 3 (1): 22-25.
[4] 黄　炜. 素因数和函数$\bar{\omega}(n)$及其均值[J]. 河南科学, 2009, 27 (9): 1031-1033.
[5] 吕国亮. 关于F. Smarandache LCM函数与除数函数的一个混合均值[J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23 (3): 315-318.
[6] 潘承洞, 潘承彪. 素数定理初等的证明[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.
[7] Tom M A. Introduction to analytic number theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

(编辑　康　艳)